

数学理解的内涵、意义与实践策略探究

赵兆兵

【摘要】数学理解是以概念及其之间的关系为核心的意义复原与生成过程。数学理解可以促进学生进行深度学习,发展学科关键能力,形成良好的学科观念。要发展学生的数学理解,可以这样做:基于经验,建立学校数学与日常数学的联系;经历过程,让学生自己建构数学知识;丰富表征,用多种方式表示数学知识;形成结构,促进认知结构再组织;感受意义,基于真实任务解决问题。

【关键词】数学理解;深度学习;学科关键能力;学科观念;问题解决

【中图分类号】G623.5 **【文献标志码】**A **【文章编号】**1005-6009(2019)49-0037-04

【作者简介】赵兆兵,江苏省苏州工业园区星湾学校(江苏苏州,2150219)教科室副主任,高级教师,苏州市教育拔尖人才,苏州市数学学科带头人。

一、数学理解的内涵解读

1. 理解的含义。

理解在《辞海》中的定义是:了解、明白事理。在实践中,人们通常把理解看成一种认知方式,抑或是一种获得知识的手段。认知心理学认为,理解实质上就是一个学习者以信息的传输、编码为基础,根据已有的信息建构内部心理表征,进而获得心理意义的过程。在哲学上,理解有两种含义:一种是意义复原,即消除误解,揭示作品的原意;一种是视界融合,即主体和客体通过对话、交流,不断生成新的视界的过程。

2. 数学理解的内涵。

基于哲学上对理解的认识,笔者认为,数学理解是以概念及其之间的关系为核心的意义复原与生成过程。与一般的理解相比,数学理解具

有典型的学科意蕴。首先,理解的对象是数学概念及其之间的关系。理解意味着对数学概念的内涵和外延的准确把握,以及对概念之间关系的清晰认识。其次,数学理解是过程与结果的统一。从过程方面看,数学理解是学生与数学知识沟通对话、相互融合,从而不断生成新的认知结构的过程;从结果方面看,数学理解则可以看成学生数学学习的一种“获得”,是外在的数学结构在个体心理上的投射。最后,数学理解具有阶段性的特点,也就是说,理解的形成不是一蹴而就的,而是一个动态的、分水平的、非线性发展的反复建构过程。皮瑞和基伦(Pirie & Kieren)的“超回归”数学理解模型非常直观地说明了这一点,他们将数学理解分为八个水平,分别为原始认知、产生表象、形成表象、关注性质、形式

化、观察反思、结构化、发明创造。

二、数学理解的教学意义

数学理解不仅是学生认知维度上的一个节点,也是数学课程与教学的存在方式。我们对数学理解的认识不能仅仅停留在经验水平,而应在哲学和心理学理论的指导下正确把握数学理解的含义,建构科学的理解观。

1.促进数学深度学习。

理解可以为个体提供一种认知上的自主性,理解的重要价值在于促进认知的深度发展。数学理解意味着数学学习不是接受知识的表层意义,而是一个最大限度地激发学生的学习潜能,使他们能深入知识意义内核进行深度学习的过程。

2.发展学科关键能力。

理解是一种表征概念和情境的能力,这种能力是以一种普遍性的、生成性的、与其他表征相联系的、能引导技能发展的方式展开的,它对推理、推断、技能的迁移和发展都极为重要,是人的认知发展乃至整个智能发展的重要基础。数学理解可以使知识结构化、网格化,形成丰富的联系,从而促进学生数学学科关键能力的发展。

3.形成良好的学科观念。

学科观念是数学素养的核心,也是数学教学的本质。数学学习的目的不是获得一大堆事实性的知识,而是形成一种正确的数学观——一种从数学的角度理解和分析问题的能力,一种用数学的眼光观察事物的偏好……数学教学的目的应该是培养学生的数学理解能力,而不是教给他们纯粹的技能。由此,数学理解意味着对知识与技能的超越,对数学深层次的理解可以促进学生形成良好的学科观念。

三、促进学生数学理解的实践策略

分析当前的数学学习活动,我们不难发现

这样两种情形:一种是活动导向的教学,学生只是参与活动,而缺少对活动意义的深刻思考,用郑毓信教授的话说就是“只动手不动脑”,学生对知识和技能的领悟和收获更多是一种偶然;另一种是灌输式学习,学生在教师带领下完成对规定性内容的学习,尽管以知识为中心的讲解、练习、训练有助于学生记忆事实、形成技能,却不能让他们形成真正的数学理解。那么,如何让学生真正理解所学习的知识呢?

1.基于经验,建立学校数学与日常数学的联系。

数学知识并不仅仅来源于课堂教学情境,也来源于学校场景之外的日常生活场景。研究表明,日常数学作为数学知识的一种形态,对学生学校数学知识的掌握和理解具有重要的影响。在日常数学思维向学校数学思维转变的过程中,先期进入的日常数学知识和后期进入的学校数学知识常常会使学生产生认知冲突,也可能使他们产生认知协同。事实上,无论是认知冲突,还是认识协同,都会对学生的数学理解造成影响。因此,恰当地建立起学校数学与日常数学的联系,将日常数学作为学校数学学习的出发点和必要背景,可以有效促进学生的数学理解。

以苏教版四下《用数对确定位置》一课的教学为例,教学之前,学生在日常生活中已经积累了一些“确定位置”的经验。但学生这种离散的、碎片化的、强情境依附的日常数学知识如何才能转化为正式的数学知识呢?在教学中,从现实的课堂场景出发,笔者设计了如下活动:首先让学生描述一下自己所在的位置,然后选择一些学生的描述,让大家根据描述猜猜他是谁。结果有的学生猜对了,有的学生猜错了。这时,笔者引导学生思考:这是怎么回事?如何才能准确而又简洁地确定一个人的位置?这样的

活动设计紧扣学生已有的知识经验,展现了学生原有的认知状态,强烈的认知冲突为揭示数学规律提供了丰富的现实基础。

2. 经历过程,让学生自己建构数学知识。

让学生自己建构数学既是教学的目标,也是他们理解数学的一种方式。当课堂上只有教师的教而没有给学生真正学习关键思想和关联点的机会时,学生的理解也就无从谈起。因此,发展学生的数学理解,重要的是让学生经历学习过程,自己建构数学知识。荷兰教育家弗赖登塔尔认为,数学的根源在于普通常识,数学实质上是人类常识的系统化,因此,每个学生都可以在一定的指导下,通过自己的实践活动来获得这些知识。事实证明,通过“再创造”的方式能达到数学理解的最好效果。

以苏教版五上《复式统计表》为例,让学生理解复式统计表的结构特征,尤其是表头的特殊性以及表格中数据的排列特征,是教学的关键。在教学中,教师首先呈现四张单式统计表,引导学生思考:要想整体比较四个兴趣小组的人数情况,用单式统计表显然不太方便,该怎么办呢?学生自然想到将四张统计表合并成一张统计表。合并之后,教师继续引导学生思考:这样合并可以吗?有什么问题?学生在讨论过程中逐步对合并之前的原始表格进行优化,最终形成一张标准的复式统计表。在这个过程中,学生主动参与建构,深化了对复式统计表的结构特征的理解。

3. 丰富表征,用多种方式表示数学知识。

为了思考和交流,人们需要以某种方式来表示一个特定的概念,这种表示的方式被称为概念表征。每一个抽象的数学概念都可以有不同的数学表征,不同表征之间的互译可以丰富儿童对概念内涵的洞察和把握。因此,在教学

中,鼓励学生用自己有意义的形式表征他们的数学观点,在不同的表征方式之间形成丰富的联系,有利于他们形成丰富的概念意象,从而深入理解数学知识。

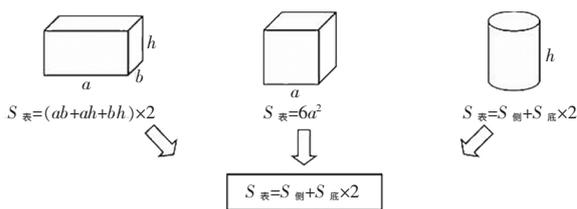
以苏教版五下《分数的意义》一课为例,在教学中,教师板书“ $\frac{1}{4}$ ”,引导学生用自己的方式表示出自己心目中的 $\frac{1}{4}$ 。在学生呈现出多种不同的表示方式之后,引导学生比较:大家的表示方法各不相同,为什么都能代表 $\frac{1}{4}$ 呢?接着引导学生思考:这里有一个圈,在里面放多少物体可以表示 $\frac{1}{4}$ 呢?经过思考争辩之后,学生发现无论放多少物体,只要它们平均分成4份,其中的1份都可以用 $\frac{1}{4}$ 来表示。教师继续引导:如果老师想在一条直线上表示 $\frac{1}{4}$,该怎么表示呢?教师围绕 $\frac{1}{4}$ 的教学精心设计多个层次的活动,让学生在关于 $\frac{1}{4}$ 的多个不同表征的转换过程中深化了对分数意义的理解。

4. 形成结构,促进认知结构再组织。

就数学学习而言,无论是一个概念的形成,还是整体认知结构的产生,都需要经历一个建构的过程。用瑞士儿童心理学家皮亚杰的话说就是:“每一个结构都是心理发生的结果,而心理发生就是从一个较初级的结构过渡到一个不那么初级的结构。”因此,理解不仅仅是将新知识与旧知识建立联系,更是创建一个丰富的、整合的知识结构。

以苏教版六下《立体图形的表面积》复习课教学为例,在学生初步回顾长方体、正方体和圆柱体表面积的计算方法之后,教师适时引导学

生：比较三个图形的计算方法，它们有什么不同？想一想，有没有统一的方法来计算立体图形的表面积呢？学生经过比较、讨论之后，进一步认识到：无论是长方体、正方体还是圆柱体，沿着高剪开，都可以把表面积分解为1个侧面和2个底面，因而它们都可以用计算1个侧面和2个底面的方法来计算表面积。（如图1）通过引导学生回顾、梳理，有效推动了他们对表面积计算方法的理解。



(图1)

5. 感受意义，基于真实任务解决问题。

基于真实任务的问题解决将学校学习视为“现实世界创造性社会实践中完整的一部分”，对促进学生的数学理解具有重要的作用。真实的任务为学生提供了一个有意义学习并促进知识向日常生活运用转化的实践场。在这一实践场中，知识、思维和学习的情境是紧密联系的，学生的信念、经验和背景构成了问题解决的概念工具。

笔者曾听过一节新加坡数学教师执教的《分数的认识》。在教学中，教师创设了一个真实的情境：在一次聚会上，小明想把5块披萨平均分给4个朋友，他不知道该怎么分，你能帮小明解决这个问题吗？学生借助手里的5张圆形纸片进行探索之后，引导他们进行交流。交流中，有的学生认为不好分；有的认为可以每人分一个，剩下的一个不分；也有的想到先一个一个地分，再把剩下的一个平均分成4份；还有的想把每一个饼都平均分成4块，再分给4个人。整节

课都围绕这个问题展开探索与交流。与我们常见的“分数的认识”教学相比，整节课几乎看不到教师的教，但学生的学习真实发生着，而且从课后反馈的学习效果来看，学生的理解也非常到位。

哈佛大学威金斯教授等人认为，理解不是单方面的成就，而是多方面的，可以通过不同类型的证据表现出来。“真正的理解”可以在六个方面得以体现，即能解释、能阐明、能应用、能洞察、能神入、能自知。这六个方面为评价学生的数学理解提供了多元的指标，同时也启示我们：数学教学不仅要关注知识的客观性标准，也要关注学生在理解数学时的个性化活动。正如澳大利亚哲学家约翰·巴斯摩尔在《教学哲学》一书中所说的：理解的方式多种多样，这些方式互相重叠又无法简化，相应地，也有许多不同的教“理解”的方法。期待数学教育因理解而给学生更多的变化与活力。

【参考文献】

- [1] 李新成. 现代认知心理学关于理解过程的研究[J]. 教育理论与实践, 1997(2): 45-49.
- [2] 余瑶, 张春莉. 国外数学理解研究的进展与展望[J]. 教育学报, 2018, 14(1): 35-44.
- [3] 皮亚杰. 儿童的心理发展[M]. 傅统先, 译. 济南: 山东教育出版社, 1982.
- [4] 乔纳森. 学习环境的理论基础[M]. 郑大年, 任友群, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2002.
- [5] 威金斯, 麦克泰格. 追求理解的教学设计[M]. 闫寒冰, 宋雪莲, 赖平, 译. 2版. 上海: 华东师范大学出版社, 2017.
- [6] 王乃涛. 儿童数学理解性教学的课堂建构[J]. 江苏教育: 小学教学, 2018(9): 50-52, 55.