

# 数学理解的六种维度观及其启示

●湖北省咸宁学院 刘良华

一直以来,数学学习强调理解,理解是学好数学的关键。很多研究者对数学理解的内涵进行了深入的分析,也提出了数学理解的不同类型。纵向的水平反映了数学理解的深度,横向的维度刻画了数学理解的多样性,它们结合在一起可以共同表现学习者对数学理解的真实状态。美国课程研究专家格兰特·威金斯(Grant Wiggins)和杰伊·麦克泰(Jay McTighe)提出了理解的六种维度:解释、释义、应用、洞察、移情、自知。本文将在这六种维度的基础上提出数学理解的六种维度,并探讨数学理解的六种维度观对我们深入认识数学理解及改进数学教学所带来的几点启示。

## 一、数学理解的六种维度

### 1. 解释说明

解释说明维度是指学习者能对某一数学问题进行完善合理的论证和说明,即能对数学概念、公式、定理进行本质的理解。解释说明的过程就是要学生回答“是什么,为什么,应如何”这一类的问题。

数学理解的解释说明不仅在于陈述数学事实,同时还应说明“为什么”和“怎么样”。如平面几何中有一条基本定理:“内错角相等,两直线平行”,学生不仅要知道为什么这条定理是成立的,还要知道如何运用定理,在什么情况下运用这条定理,如果学生不能做到这点,说明它还没有理解定理的本质,也就没有达到数学理解的这一维度。

### 2. 自我阐释

自我阐释维度是学习者能通过自己的语言来揭示数学事实的意义,是学习者对数学独特的个体性理解。自我阐释的过程就是要学习者回答这样一些问题:问题的意义是什么?重点是什么?与以前的知识有什么联系?也即通过讲述来表达数学事实背后的意义。

理解性的自我阐释需要揭示数学事实的意义。通过对数学事实意义的描述,可以促成学生对某一特定数学对象的理解与洞察。很多数学对象的意义总是隐藏在事实的背后,总是抽象而不易察觉的,一般来说学习者很难理解这些抽象而又晦涩的信息。自我阐释的目的就是要学习者转换数学对象的表征方式,通过比较、类比、归纳、演绎、分析、综合等多种加工方式来

发现并揭示出数学对象背后的意义,以期达到理解的这一维度。

### 3. 应用迁移

应用迁移是数学理解的第三个维度。数学理解的应用迁移是指能用数学知识进行创造性思维,提出新颖的思想方法和熟练的数学技能去解决学习和生活中的问题。在应用过程中,学习者要回答以下这些问题:所学的数学知识和技能用在何处?如何用?

首先,理解性的应用迁移需要把数学知识与具体情境相结合,使两者相一致。这里所谓的应用迁移不同于数学知识本身或数学知识的简单运用。要达到理解性的运用,学生应能在无任何提示的帮助下运用知识,并且他们所面临的问题是全新的,或者面对的是真实世界的问题。例如要求学生搜索有关数据,估算一下我国2009年18岁的人口数?测量本校教学楼的高度?

其次,理解性的应用还需要对原有的数学知识进行创新。瑞士儿童心理学家皮亚杰指出:学生的理解是通过他们应用知识过程中的创新表现出来的。理解性的应用要求超越常规方式,从多个视角,运用多种方法和多种策略来解决问题。事实上,学生只有通过对数学知识进行再创造,才能真正内化知识,为自己所理解,在行为上表现出灵活地运用知识于新的情境,解决现实问题。

### 4. 批判洞察

批判洞察是数学理解的第四个维度。能够进行批判洞察的学生有着一一种对数学知识极深刻的理解,他们能够透过问题的表面看到其内在本质,赋予一些常规的数学思想以新的意义。这是一种颇具创新力度的理解,是一种需要通过努力才能获得的能力。

加德纳认为深入理解的一个重要特征在于运用多种不同的方式来呈现某个问题,并从多个角度用不同的方法进行解决。具有洞察力的学生往往能够注意到别人经常不以为然、容易忽略的细节,更容易批判性地看待每个问题。他们经常会提出这样的问题:从另外一个角度怎么看这个数学问题?这个数学问题有没有其他的变化形式?这个问题的结论是否正确,能否对结论进行推广?这种解法是否合理,能不能简化,

还有没有其他的解法?我们在数学教学中提倡的简化条件、推广结论、一题多变、一题多解、多题归一等就能够很好地培养学生的批判洞察能力。

#### 5.移情体验

移情体验是数学理解的第五个维度,是指一种能深入体会他人的感情和观点的能力。数学理解不仅涉及认知方面,还表现在情感上。从这个意义上讲,在数学学习中我们要达到理解,必须做到两个方面。一是要尊重他人的观点,在心理上容许他人对数学问题有不同的看法。哪怕他人的思想和方法看起来没有自己合理,也要注意吸收其中的优点,因为任何一种解决数学问题的思想和方法都有其可取的地方。如勾股定理的证明方法就有多种,有些简洁,有些繁琐,但都体现了不同的数学思想和方法,每一种思想和方法对我们都有启迪,可以开阔我们的视野,拓宽看待问题的角度。数学理解中的移情体验维度反映了数学学习的社会性特征,反映了学习者在建构对数学理解的过程中群体交互的支撑、互助力量。这种力量根植于学习者对他人观点的反思和深刻洞察,并基于此对自身经验进行反省和改进。二是要深刻领会数学家在数学的创造发明过程中经历的矛盾、困惑直至成功的心理过程,深层次感受重要数学思想发展背后内隐的创新魅力和价值,从而超越表层理解而达到一种深层次的理解。

#### 6.自我反思

自我反思是数学理解极为关键的一个维度,是一种抽象的思维活动,一种不断的反复思考。它要求学习者对数学学习思维活动的过程进行回顾性的思索,思考领悟数学活动中所涉及的知识、方法、思路、策略等,从而提炼经验、总结教训,使认识逐步深化或得到新的思考问题的起点,并达到调整和完善数学认知结构的目的。反思还能够理智地认识到自己思维与行为模式的优势和局限性,能明确地辨别并避免由于自己的偏见、习惯、思维或行为方式等带来的误解。反思要求学习者不断回答以下问题:我是如何想的,如何思维的,用了哪些数学思想、方法、技巧?我的理解存在哪些局限性?我的不足之处在哪里?我对什么容易产生误解?从而进一步洞察数学理论的本质,领会数学思想的精髓,以达到高层次的理解。

### 二、启示

数学理解的六个维度从多个角度阐明了什么是数学理解,学生实现数学理解时应有何种表现。这六种维度观对我们深入认识数学理解,改进数学教学提供了一些有益的启示。

#### 1.数学理解要求认知与情感协调统一

一般来说,教师眼中的数学理解就是能真正领会数学知识,掌握数学知识的本质内涵,并能运用数学知识解决实际问题。从这里我们可以看出,他们所谓的理解只限于数学认知领域,而忽略了情感方面的因素。根据数学理解的六种维度观,数学理解不仅包含认知领域(解释说明、个体阐释、应用迁移),还包含情感领域(批判洞察、移情体验、反思明辨)。数学理解的六个维度体现了认知与情感的协调统一,认知中渗着情感,情感中带有认知。

#### 2.教师应全方面考察学生的数学理解

依据数学理解的六种维度观,我们知道对数学的理解是一种多维度、复杂的东西,成熟的理解包括了这六个维度的高度发展。有研究表明,即使学生给出了一个数学问题表面看来是完美的解答,这也不表明学生完全理解了其中相关的数学,有的可能只是学生的一种记忆与模仿。因此,教师在考察学生对数学的理解时,应多角度地进行考察,而不只是根据学生对问题的答案来确定他是否理解。

#### 3.注重数学交流

在教学过程中,教师应注重数学交流。通过数学交流,教师可以发现学生理解的过程,理解的深刻程度,有没有独到的见解,存在的问题是什么,以及存在这些问题的原因在哪里。学生也可以通过交流重新认识、思索哪些理解得不是很透彻,哪些理解出现了偏差,自己的理解与别人的理解有什么不同,别人的优点在哪里,这样就可以达到数学理解的批判洞察和移情性体验维度。

#### 4.数学课堂应实施理解性教学

数学课堂教学的三维目标是知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观。数学理解的六种维度观为我们在数学课堂实施理解性教学,实现数学课堂教学目标提供了理论基础和实践指导。教师在设计教学活动、明确学习目标、评价学习表现时,应考虑这些多样化的维度,运用不同的标准,构建理解性的数学课堂,凸显理解在数学教学中的核心地位,营造一个为理解而教,为理解而学的数学教学氛围。

#### 参考文献

[1] 马复.试论数学理解的两种类型.数学教育学报,2001(3).

[2] 李士琦.PME·数学教育心理.上海:华东师范大学出版社,2001.

[该文为咸宁学院科研项目—高效率数学学习行为的归因研究(KY0720)阶段性成果]

(责任编辑 刘永庆)