对数学理解的再认识

黄燕玲[1]，喻　平[2]

（1．广西河池师范高等专科学校 数学系，广西 宜州 546300；2．南京师范大学 数学与计算机科学学院，江苏 南京 210097）

摘要：现代心理学将知识分为陈述性知识和程序性知识 2 大类，根据数学知识的特征，我们将数学知识分为结果性知识和过程性知识 2 类，其中结果性知识包括陈述性知识和程序性知识．因而，数学理解就应指对陈述性知识、程序性知识和过程性知识的理解．图式的获得、产生式系统的建构、关系和观念表征的完善分别是陈述性知识理解、程序性知识理解、过程性知识理解的本质．

关键词：数学理解；陈述性知识；程序性知识；过程性知识

中图分类号：G421　文献标识码：A　文章编号：1004–9894（2002）03–0040–04

“数学理解”已成为当今数学教育研究的一个热点[1~4]．纵观这些研究，可以发现有一个明显的缺陷，即缺乏对数学过程性知识理解的探究，本文旨在对这一问题作初步探索．

1　“数学理解”的研究概述

1.1　两种学习理论对“理解”的阐释

行为主义把学习解释为刺激与反应之间的联结，认为学习过程是一种试误过程，在不断的尝试与错误中逐渐形成联结．在行为主义看来，刺激与反应的联结受到练习和使用的次数增多而变得越来越强，反之，变得越弱．因而，行为主义学习观强调技能训练，实现技能由“自觉地执行”向“自动地执行”的转化，于是，个体对知识的理解就是记忆概念、规则和方法，并能迅速提取并用于解决问题．显然，行为主义将知识理解定位在知识记忆的层面上，而不对“机械性记忆”和“在理解基础上的记忆”加以区别．事实上，行为主义只关注人的外部行为，不研究人的内部思维过程，因而不可能对“知识的理解”作深入探讨．

现代认知心理学认为理解的实质是学习者以信息的传输、编码为基础，根据已有信息建构内部的心理表征、并进而获得心理意义的过程．Mayer 给出了学习者的理解过程模式[5]，如图 1 所示．

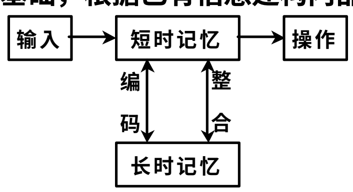

图 1　理解过程的一般模式

在这一模式中，个体的理解分为 3 个阶段：第一阶段，各种信息经过注意的“过滤”，部分信息经过感觉登记进入短时记忆．第二阶段是编码阶段，进入短时记忆的信息没有得到复述和加工的部分很快消退，得到及时复述和进一步加工的信息进入长时记忆．第三阶段是表征的重新建构和整合阶段．当信息进入长时记忆后，一方面，使已有图式的一些节点和相应的区域被激活，从而使已经得到编码的信息获得了心理意义；另一方面，新信息的纳入又使已有的图式发生相应的变化，形成新的知识网络和认知结构．

由于认知心理学是从人的内部心理去探索人类的学习规律，从而对知识理解的解释就更加深刻和合理．

1.2　对数学理解的研究

对数学理解的研究主要集中在几个方面．

（1）数学理解的界定．Hiebert 和 Carpenter[1]认为：“一个数学的概念或方法或事实被理解了，如果它成为个人内部网络的一个部分．”李士锜[3]认为：“学习一个数学概念、原理、法则，如果在心理上能组织起适当的有效的认知结构，并使之成为个人内部的知识网络的一部分，那么才说明是理解了．”显然，对数学理解的界定源于认知心理学对“理解”的界定，都是以信息的内部表征作为解释的基础．

（2）数学理解水平的划分．Pirie 和 Kieren[3]将数学理解分为 8 个水平，即初步了解、产生表象、形成表象、关注性质、形式化、观察评述、组织结

收稿日期：2002–05–31
基金项目：广西“十五”规划教育科学重点课题——中学生数学学习心理的实证研究（桂教办 200112）
作者简介：黄燕玲（1966—），女，广西武宣人，广西河池师范高等专科学校数学系讲师，南京师范大学访问学者，从事数学教学论研究．

构和发现创造．这 8 种水平的关系，可以用 8 个嵌套的圆来表示，每一种水平用一个圆表示，并依水平的增高所表示的圆的半径依次增大，前一个圆包含在后一个圆中，逐步拓广．这一组圆描述了理解水平之间的相互关系，同时表明理解是一个动态的、组织的过程．Skemp[2]则认为理解分为 2 种模式，即工具性理解和关系性理解．所谓工具性理解，指语义性或程序性理解，即符号 A 代表什么事物或规则 R 怎么操作；关系性理解则需对符号的意义、获得符号指代物意义的途径，规则的逻辑依据等有深刻认识．显然，Skemp 关于理解的 2 种模式实质是指理解的 2 个不同层面，只有从工具性理解达到关系性理解，个体才能把握数学对象的本质．

（3）理解的功能．Carpenter、Resnick[1]等人的研究表明，数学理解有助于发明创造．其基本论点是：丰富的内部知识网络容易激活、引导和检验，这是创造与发明的基础，而完善的图式建构依赖于理解．Baddeley[1]等研究认为，理解能促进记忆．Davis、Meknigth[1]等人对理解和迁移的关系作了较深入的研究，指出理解会直接影响迁移．此外，Doyle[1]等人通过研究认为，理解会影响学生对数学的信念．

2　对数学理解的再认识

从上述研究概况可以看出，对数学理解的本质认识可概括为：（1）对数学概念、规则或方法的理解，指个体建立了关于这些观念的内部网络．（2）数学理解的水平具有层次性，个体的差异往往表现为理解水平的差异．（3）数学理解是一个动态过程，是认知结构的建构和知识意义的建构过程．

但是，综观这些研究可以发现，对数学理解的探讨多是定位在数学基本知识和基本方法的解释方面，而不涉及对知识产生过程的理解（即使认为理解是一个动态过程，也只是指通过个体内部的认知过程去达到对“结果性知识”的理解）．因而，对数学过程本质的认识就会出现偏差．下面从知识的现代分类出发，对数学理解的本质进行探讨．

2.1　数学知识的分类

对一般知识而言，现代认知心理学对其作了广义的分类．将知识分为 2 类，一类是关于事实性知识的陈述性知识；另一类指关于进行某项操作活动的程序性知识．其中，程序性知识又分为 2 个亚类，一类是通过练习，其运用能达到相对自动化程度的程序性知识（智慧技能）；另一类是受意识控制而难以达到自动化程度的策略性知识（认知策略）．显然，这种对知识的分类主要是针对结果性知识而言的，虽然在“策略性知识”中含有“过程性知识”的因素，但策略性知识更多的成分是表明结果性知识的获取和应用的策略．

我国于 2001 年颁布了《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》，明确提出了义务教育阶段数学课程的总目标，将其分为知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度等 4 个子类，在每一类中都渗透“过程性目标”的思想，用经历、体验、探索 3 个动词刻画数学活动水平[6]．经历，指在特定的数学活动中获得一些初步的经验．体验，指参与特定的数学活动，在具体情境中初步认识对象的特征并获得一些经验．探索，指主动参与特定的数学活动，通过观察、实验、推理等活动发现对象的某些特征或与其它对象的区别和联系．《标准》虽没有明确提出“过程性知识”，但过程性目标实质蕴涵了过程性知识的内核．

我们认为，数学知识应分为结果性知识和过程性知识 2 类，结果性知识包括陈述性知识、智慧技能、认知策略[7]．对过程性知识作如下界定：过程性知识是伴随数学活动过程的体验性知识．体验分为 4 个阶段：（1）对知识产生的体验．体会知识产生的缘由，明晰新旧知识之间的关联和因果关系．（2）对知识发展的体验．体悟知识发展的动因，包括数学学科的内部因素和促进知识发展的外部因素，习得探究数学问题的方法（逻辑的和非逻辑的）和策略．（3）对知识结果的体验．领会蕴涵在知识中的数学思想方法，感受数学结构的美．（4）对知识应用的体验．体会数学应用的广泛性，积累解决问题的认知策略和元认知知识，形成自我监控的意识和习惯．

由此可见，过程性知识是一种内隐的、动态的知识．首先，过程性知识没有明确地呈现在教学材料中，而是隐性地依附于学习材料，在学习的过程中潜性地融会贯通，因而表现为内隐性．其次，过程性知识始终伴随知识的发生和发展过程，学习者只能在学习的过程中去体悟和习得，体现出过程性知识的动态性．

将数学知识分为结果性知识和过程性知识符合数学学科的特性．众所周知，数学对象具有高度的抽象性，这种抽象性是思维的产物．从纵向看，

随着抽象程度的不断深入，在一个数学对象的基础上能抽象多个相互关联的新的数学对象，形成多次抽象链；从横向看，不同数学结构中的对象又可能形成同构或同态关系，从而组合一个由映射联结的网络结构．显然，抽象的结果源于抽象的过程，这种过程体现了数学的精骨．作为数学学习，不能只掌握抽象的结果，还要能体悟抽象的过程．

2.2 数学理解的本质

认知心理学家将知识在学习者头脑中的呈现和表达方式称为知识的表征．对知识的理解与知识的表征密切相关，事实上，对一个事物本质的理解，就是指该事物的性质以一定的方式在学习者头脑中呈现并能迅速提取．基于此，我们将理解解释为对知识的正确、完整、合理的表征．

根据对数学知识的分类，数学理解应涵盖对陈述性知识、程序性知识及过程性知识的理解等 3 个方面．

（1）对陈述性知识的理解．

陈述性知识以命题、表象、线性排序等 3 种形式作为基本表征单位[8]．命题相当于头脑中的一个观念，一个命题被看作是陈述性知识的最小单元．一个命题不是孤立的，它与其它命题相互联系组成命题网络．表象表征是对事物的知觉特征的保留，是一种连续的，模拟的表征．线性排序是对一系列元素所作的线性次序的编码．在人的知识表征中往往组合了命题、表象及线性排序，从而形成对知识的综合表征——图式．Anderson[8]认为：“图式是对范畴的规律性做出编码的一种形式．这些规律性既可以是知觉性的，也可以是命题性的．”显然，图式包容了命题网络，因为命题网络并不对可以知觉的规律性做出编码．Gagne[8]对图式的特征作了更细致的刻画：①图式含有变量；②图式可按层级组织起来，也可以嵌入另一图式之中；③图式能促进推论．

对数学陈述性知识的理解是从知识的基本单元表征，到形成命题网络，再到获得图式的过程．现以“函数”概念为例作分析．函数 $y = f(x)$ 由自变量、因变量及对应关系 3 个部分构成，学习者首先需在对这 3 个命题表征的基础上形成构成一个概念自身的命题网络．其次，学习者需要明晰函数概念与其它概念的关系，譬如，从纵向看，函数的上位概念是映射，下位概念是各种特殊函数；从横向看，还需明辨函数与方程、函数与不等式等概念之间的关系，从而形成函数概念与其它概念相互联系的命题网络．再次，学习者还要理解函数与图像的关系，对一些特殊函数的图像，头脑中应有清晰的印象，即对函数概念进行表象表征．经历了上述 3 个步骤，学习者就会获得函数概念的图式，这个图式含有变量（如包含许多形式不同的函数表达方式：解析式、图像、表格等）．同时，这个图式按层级组织，而且能促进推论（如函数的单调性、奇偶性、周期性等性质）．

许多学者认为，所谓对一个陈述性数学知识的理解就是在个体头脑中建立了该对象的一个命题网络．这种界定将知觉表征排除在外，有偏颇的一面，笔者认为，对一个陈述性数学知识的理解，是指学习者获得了该对象的图式．

（2）对程序性知识的理解．

程序性知识是由陈述性知识转化而来的，是陈述性知识的动态成分．与静态的陈述性知识不同，程序性知识以“产生式”这种动态形式来表征．所谓产生式指一条“条件——行动”规则，即一个产生式总是对某一或某些特定的条件满足时才发生的某种行为的一种程序．当一个产生式的行动成为另一个产生式的条件时，这 2 个产生式便建立了相互的联系，若一组产生式有这种相互联系，便形成一个产生式系统，产生式系统代表了人从事某一复杂行为的程序性知识．

对数学知识而言，其二重性表现得尤为突出，这种二重性或称为概念性知识和方法性知识（Hiebert & Carpenter），或称为对象和过程（Thompson 等），其本质就是陈述性知识和程序性知识．一个数学概念既包含结果也包含过程，如“加法”：$a + b$，既代表 2 个集合中的元素合并或添加起来的过程，又代表合并或添加后的结果．又如，“函数”：既代表定义域中的元素按对应法则与值域中元素作对应的过程，又代表特定对应的关系结构．因而，对数学知识的理解就不仅包括对静态的、结果的陈述性知识的理解，而且还包括对动态的程序性知识的理解．

既然程序性数学知识的表征是产生式和产生式系统，因此，程序性数学知识的理解就应解释为学习者对产生式和产生式系统的获得．特别地，我们认为对程序性知识中的策略性知识，其表征是一种双向产生式．双向产生式是一种具有双重功能的指令，它既能指令在具备什么样的条件下会有什么

动作，又能指令在不同的情形中选用不同的产生式．换言之，学习者不仅知道“如果…那么…”，而且还应知道在什么条件下去使用这个“如果…那么…”．

综上所述，学习者对程序性数学知识的理解，是指他建立了双向产生式和产生式系统．

（3）对过程性知识的理解．

过程性知识与程序知识的共通之处是 2 者都是动态型知识，但 2 者的内涵是不同的．其一，过程性知识是指个体对数学知识发生发展过程的体验性知识，当然包含对陈述性知识及程序性知识获得的体验，其动态性贯穿于知识学习的全过程．而程序性知识是进行某项操作活动的程序，它是陈述性知识经过内化而得，其动态性表现在学习过程中的知识应用阶段．其二，程序性知识通过一定量的练习后可以习得甚至形成自动化技能，但过程性知识难以通过练习去习得．其三，程序性知识往往是针对某个知识点而言的，而过程性知识则是关注知识点之间的关系．

我们将过程性知识的表征分为 2 个层面，一是关系表征，二是观念表征．关系表征指个体对知识发展过程中知识之间存在某些关系的体悟．具体地说，它相当于陈述性知识的命题网络中连结命题的连线，以及程序性知识的产生式系统中连结产生式的连线．观念表征则是对知识之间发生关系的缘由的体悟，其成分更多的是一种元认知体验．这 2 种表征因人而异，不同的学习者对同一对象的关系表征的完善性、观念表征的深刻性都可能不同．

综上分析，对过程性知识理解的内核是，学习者形成完善而深刻的关系表征和观念表征．

参考文献：

[1] 格劳斯． 数学教与学研究手册[M]．陈昌平译．上海：上海教育出版社，1999．131–194．

[2] 马复．试论数学理解的两种类型[J]．数学教育学报，2001，10（3）：50–53．

[3] 李士锜．数学教育心理[M]．上海：华东师范大学出版社，2001．64–87．

[4] 李淑文，张同君．“超回归”数学理解模型及其启示[J]．数学教育学报，2002，11（1）：21–23．

[5] 李新成．现代认知心理学关于理解过程的研究[J]．教育理论与实践，1997，(2)：45–49．

[6] 中华人民共和国教育部基础教育课程教材发展中心．义务教育阶段国家数学课程标准（实验稿）[M]．北京：北京师范大学出版社，2001．1–105．

[7] 喻平．知识分类与数学教学[J]．数学通报，2000，(12)：12–14．

[8] 吴庆麟．教育心理学[M]．北京：人民教育出版社，1999．244–297．

Rethinking on Understanding in Mathematics

HUANG Yan-Ling[1], YU Ping[2]

(1. Department of Mathematics, Hechi Teacher's School, Guangxi Yizhou 546300, China;

2. Mathematics and Computer Science Institute of Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210097, China)

Abstract: The knowledge was divided into the declarative knowledge and the procedural knowledge in psychology. In this paper, the mathematical knowledge was divided into two kinds: the resultant knowledge and the processions knowledge. The resultant knowledge included the declarative knowledge and the procedural knowledge. Thus, understanding in mathematics ought to include understanding to three kinds of knowledge. The essence of understand in the declarative knowledge was that learner could obtain a schema, the essence of understand in the procedural knowledge was that learner could set up production system, and the essence of understand in the processions knowledge was that learner could gain the representation of relation and the representation of idea.

Key words: understanding in mathematics; declarative knowledge; procedural knowledge; processions knowledge

[责任编校：周学智]